CRS 企業の利潤最大化問題教授法についての考察

塩田 尚樹 *

概要

本論では，マクロ経済学などの学部中・上級から大学院初級向けテキストに頻出する，2 生産要素 1 生産物で規模に関して収穫一定（CRS）の生産技術を持つ完全競争企業の利潤最大化問題の，教育上の工夫について論じる．CRS 企業の利潤最大化が一筋縄では行かないことはよく知られているが，多くのテキストではモデルの展開を急ぐため説明が不十分であり，偏微分を何とか習得したレベルの学習者を混乱させている．そこで本論では，混乱緩和のため，すべての価格ベクトルと CRS 企業の利潤最大化の結果である三つのケースとの関係を視覚的に把握できるような，補完的解説を試みる．

1　はじめに

2 生産要素 1 生産物モデルにおける，規模に関して収穫一定（CRS）の生産技術を持つ完全競争企業の利潤最大化は，ソロー・モデルやヘクシャー＝オリーン・モデルが想定する企業行動であるため，マクロ経済学・経済成長論や国際貿易論の学部中・上級から大学院初級向けテキストに頻出している．

CRS 企業の利潤最大化問題は，所与とする価格ベクトルに応じて，投入ゼロ・産出ゼロのみが最適解であったり，最適解が無数に存在したり，最適解が存在しなかったりするため，一筋縄でいかないことがよく知られている．しかしながら多くのテキストでは，モデルの展開を急ぐため同問題の取り扱いが不十分であり，偏微分を何とか習得したレベルの学習者[*1]を混乱させている．このような混乱は，学習者がすべての価格ベクトルと CRS 企業の利潤最大化行動との関係をとらえきれていないために生じると考えられる．もし，この関係をしっかりと把握できていれば，前述のテキストが，費用最小化が利潤最大化の十分条件となる価格ベクトルのみに注目して CRS 企業の行動を展開していることを理解でき，CRS 企業の「利潤最大化の 1 階条件」の意味をとらえ直すことができるからである．

* 本論文の作成にあたり，大坂洋 (富山大学)，須藤時仁 (獨協大学)，松尾匡 (立命館大学) の各氏から，貴重なコメントを頂いたことに感謝する．

*1 例えば，経済数学のテキストではドウリング (1995) を理解することが可能であり，ミクロ経済学のテキストでは武隈 (1999) や奥野 (2008) には手が届くが西村 (1990) や林 (2013) は敷居が高いと感じるような学習者を想起されたい．

そこで本論では，前述のレベルの学習者に，すべての価格ベクトルと CRS 企業の利潤最大化行動との関係を説明する試案を提示する．

まず 2 節では，当該学習者が CRS 企業の利潤最大化問題に直面したときの混乱について確認した後，大学院レベルのミクロ経済学のテキストにおける同問題の解説を概観し，それらの独習で対応させることが困難であるため本論のような補完的解説が必要であることを示す．

本論の主要部分である 3 節では，価格ベクトルと企業行動との関係を視覚的にとらえやすい，多段階アプローチを提案する．まず，生産関数を所与とする元々の利潤最大化問題を，生産関数および産出量を所与とする費用最小化問題と，それによってえられる費用関数を所与とする利潤最大化問題とに分割して分析する．そして，それらの結果を統合する際に実質要素価格フロンティアを援用し，各実質要素価格と限界費用・限界収入比率の値との関係を視覚化して，元々の価格ベクトルと CRS 企業の利潤最大化の結果である三つのケースとの関係の全体像をつかめるようにする．代替の弾力性の差異などにより CRS 企業には様々なタイプが存在するが，生産技術の違いが価格と利潤最大化行動との関係にどのように反映されるかについても，本節の図を使えば容易に理解できる．

最後に 4 節では，3 節の議論を応用して，前述のマクロ経済学などのテキストにおける特定の価格ベクトルの成立を前提とする CRS 企業の定式化が，家計の選好を限定することによってはじめて正当化できるものであることを明らかにする．

2　対象とする利潤最大化問題と学習者の混乱

本節では，対象とする 2 生産要素 1 生産物で CRS の生産技術を持つ完全競争企業の利潤最大化問題を定式化し，いくつかのテキストにおける同問題の取り扱いと学習者の混乱について検討して，本論の動機づけとする．

市場における生産物の価格を $p > 0$，生産要素 1 の価格を $w_1 > 0$，生産要素 2 の価格を $w_2 > 0$ とし，企業の生産物産出量を $q \geq 0$，生産要素 1 投入量を $z_1 \geq 0$，生産要素 2 投入量を $z_2 \geq 0$ とする．企業の生産技術は，各生産要素投入量と最大産出量との関係を示す生産関数 $f(z_1, z_2)$ で表されるとする．以上のもとで，完全競争企業の利潤最大化行動は，次の最適化問題として定式化される．

$$\begin{aligned} &\max_{q,\, z_1,\, z_2} \quad pq - w_1 z_1 - w_2 z_2 \\ &\text{s.t.} \ \ q \leq f(z_1, z_2),\ q \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

なお，CRS 企業の場合は，任意の $t \geq 0$ について $f(tz_1, tz_2) = tf(z_1, z_2)$ である，という

仮定が追加される．[*2]

学部初・中級の価格理論における経済主体の最適化行動の教育では，主として，正の値をとる最適解が一意的に存在するケースが取り扱われる．微分・偏微分の利用が始まると，この傾向はさらに強くなる．学習者は，主体の各選択変数に関する目的関数の微分係数・偏微分係数がゼロであるという等式（1 階条件）を導出し，それを加工することで当該主体の需要関数・供給関数を求めるという『レシピ』に慣れ親しむことになる．

問題 (1) についても，まず，$f(z_1, z_2)$ の強意凹性等が仮定された状況で，企業は各生産要素の限界生産物と実質要素価格が等しくなるように要素投入量を決定する，すなわち，

$$f_1(z_1, z_2) = \frac{w_1}{p},\ f_2(z_1, z_2) = \frac{w_2}{p} \tag{2}$$

を満たすように z_1, z_2 を選択するという説明を受ける．[*3] その結果学習者は，生産物価格が上昇すると実質要素価格が低下して要素投入量が増加するため産出量が増加するなどのように，価格ベクトル (p, w_1, w_2) と利潤を最大にする産出量・要素投入量との関係を把握できるようになる．

ところが，CRS 企業の利潤最大化となると状況は一転する．例えば，マクロ経済学のテキストである Mankiw (2013)[*4]および齊藤他 (2010)[*5]，経済成長論のテキストである Jones and Vollrath (2013) [*6] や武隈 (1999) の国際貿易の部分[*7]では，特に前置きなく，[*8] 利潤を最大化する完全競争的な CRS 企業が (2) を満たすように要素投入量を決定する，という旨の説明がなされている．[*9] テキストの展開を追うだけであれば問題はないが，学習者が自ら 1 階条件を整理してみると，要素投入量が消えてしまったり，解けなかったりする．そのため，価格と産出量・要素投入量との関係を確認できず，CRS 企業の行動の全体像がとらえられない．結局，積極的に『レシピ』を試そうとする熱心な学習者ほど混乱するという皮肉な結果になる．

存在・一意性・正値性など CRS 企業の利潤最大解の詳細について知りたいのであれば，本格的なミクロ経済学のテキストで勉強するべきである，というのがおそらくテキストを執筆する側・教える側の本音であろう．そこで，微分・偏微分の初歩的な知識だけを持つ学習者に利用可能か否かという問題はさておき，大学院レベルのテキストをいくつか取り上げ，CRS 企業の問題 (1) がどのように扱われているか確認する．

[*2] 例えば，Varian (1992) p.15.

[*3] いうまでもなく，産出量は $q = f(z_1, z_2)$ により決定される．

[*4] pp.49 – 61.

[*5] pp.296 – 305.

[*6] pp.22 – 23.

[*7] pp.323 – 327.

[*8] Jones and Vollrath (2013) には，CRS では企業の数は確定しない，というコメントあり．

[*9] 実際は，生産要素が資本と労働であり，各実質要素価格が実質賃金率と実質資本レンタル率という設定であるが，本質的な違いはない．

Henderson and Quandt (1980)[*10]は，CRS 企業が価格受容者として利潤を追求する場合，生産すると損失が発生するため廃業することが最適であるケース，利潤の上限が存在しないため最適解が存在しないケース，および，最大利潤をゼロとする最適解が存在するが一つではないケース[*11]の三つが生じうると説明している．しかしながら，価格と三つのケースとの関係が明確でなく，企業の生産技術の違い[*12]がどこに現れるかについてもふれていない．

西村 (1990)[*13]は，1 生産要素 1 生産物の CRS で価格に応じて前述の三つのケースが生じうることを確認した後，2 生産要素 1 生産物のコブ＝ダグラス生産関数の数値例で，利潤最大化の 1 階条件が成立する価格ベクトルと投入ゼロ・産出ゼロのみが最適解となる価格ベクトルを導いている．ただし，各ケースの場合分けの基準が持つ経済的意味にはふれていない．[*14]

Varian (1992)[*15]は，CRS 企業の場合，価格によっては，利潤最大解が存在しなかったり，存在しても一意でなかったりする可能性があることを指摘しているが，詳細についてはふれていない．

Mas-Colell et al.(1995)[*16]は，コブ＝ダグラス生産関数の例を使用し，産出量を所与とする費用最小化問題とそれによって導出された費用関数を所与とする利潤最大化問題の二段構えで問題 (1) にアプローチし，単位当たり最小費用と生産物価格の大小によって前述の三つのケースの場合分けが決定されることを示している．そのため，場合分けの基準の経済的意味は明らかであるが，コブ＝ダグラス限定であるため生産技術の違いがもたらす影響はとらえにくい．

林 (2013)[*17]は，1 生産要素 1 生産物の CRS での確認の後，2 生産要素 1 生産物のコブ＝ダグラス生産関数の例を使って，どのような価格ベクトルのもとで前述の三つのケースが生じるか算出している．ただし，三つのケースの場合分けの基準が持つ経済的意味にはふれていない．

以上のようにいずれのテキストも，CRS 企業の場合，価格ベクトルに応じて，利潤最大解が端点であるか，一意的でないか，あるいは，存在しないかの三つのケースになるということは説明している．けれども，価格ベクトルと産出量・要素投入量との具体的な関係

[*10] p.109.

[*11] 利潤最大化の限界条件を重視する理論は，この三つ目のケースのみに焦点を当てているという重要な指摘もしている．

[*12] CRS 企業にも様々なタイプが存在する．

[*13] pp.147 – 148.

[*14] n 生産要素 1 生産物の一般的な CRS で，最大利潤がゼロであることが利潤最大化の 1 階条件が成立するための必要条件であることは証明している．

[*15] pp.29 – 30.

[*16] pp.141 – 142．なお，後続の pp.143 – 144 において 1 生産要素 1 生産物のグラフで説明を補完している．

[*17] pp.208 – 212.

については，一切ふれていないか，コブ＝ダグラス生産関数に限定して取り扱っているかのいずれかである．経済成長論や国際貿易論ではコブ＝ダグラス型よりも一般的な CRS 技術を想定して議論されることが多いため，学習者が自ら大学院レベルのテキストの行間を埋め，拡張する必要がある．最適化の『レシピ』になじんだばかりの学習者にとって，そのような作業が無理難題であることはいうまでもない．よって，当該レベルの学習者にもさほど困難なく利用可能な問題 (1) へのアプローチを新たに考える必要がある．

3　多段階アプローチ

本節では，2 生産要素 1 生産物で一般的な CRS 生産技術を持つ完全競争企業の利潤最大化行動を，ドウリング (1995) レベルの数学的素養を持つ学習者に解説する試案を提示する．まず，Mas-Colell et al.(1995) と同様に，生産関数を所与とする利潤最大化問題を，産出量制約付き費用最小化問題と同問題からえられた費用関数を所与とする利潤最大化問題とに分けて分析する．そして，それらの結果を統合し，価格ベクトルと生産物産出量・生産要素投入量との関係を導く際，実質要素価格フロンティアを援用する．

3.1　生産要素投入量の選択

CRS の仮定の下で，w_1, w_2 と産出量 $q \geq 0$ を所与として，生産費用を最小にするように z_1, z_2 を選択する問題，すなわち，

$$\begin{aligned} \min_{z_1,\, z_2} \quad & w_1 z_1 + w_2 z_2 \\ \text{s.t.} \quad & f(z_1, z_2) \geq q,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

を考える．問題 (3) は，武隈 (1999) pp.99–103，奥野 (2008) pp.112–118 のなどように，学部中級レベルのミクロ経済学のテキストで取り扱われているため詳述せず，次項以降の展開で学習者が必要とする事実の確認のみにとどめる．

問題 (3) の解，すなわち，費用最小解は，図 1 の (z_1^c, z_2^c) のように，産出量が q 単位であるときの等量線と要素価格が w_1, w_2 であるときの等費用線が接するところに位置する．等量線が q に依存し等費用線が w_1, w_2 に依存するため，それらの接点は w_1, w_2, q に依存して決まる．よって以降，問題 (3) の解である各生産要素投入量を $z_1(w_1, w_2, q), z_2(w_1, w_2, q)$ とあらわす．

（最小）費用関数 $C(w_1, w_2, q) = w_1 z_1(w_1, w_2, q) + w_2 z_2(w_1, w_2, q)$ は，(w_1, w_2) について 1 次同次，すなわち，任意の $t > 0$ について

$$C(tw_1, tw_2, q) = tC(w_1, w_2, q) \tag{4}$$

である．[18]

CRS 企業の場合，費用最小解が q について 1 次同次であるから，

$$z_1(w_1,w_2,q) = z_1(w_1,w_2,1)q,\ z_2(w_1,w_2,q) = z_2(w_1,w_2,1)q$$

が成立する．[19] よって，最小費用に関しても

$$C\left(w_1,w_2,q\right) = C\left(w_1,w_2,1\right)q \tag{5}$$

が成立する．すなわち，CRS 企業の場合，限界費用および平均費用は産出量にかかわらず $C\left(w_1,w_2,1\right)$ である．

なお，$f(z_1,z_2)$ が連続微分可能である場合，内点解においては

$$w_1 = \lambda f_1(z_1,z_2), \tag{6}$$
$$w_2 = \lambda f_2(z_1,z_2), \tag{7}$$
$$q = f(z_1,z_2)$$

が成立する．[20] ただし，λ は問題 (3) のラグランジュ乗数であり限界費用を表すため，(5) より，

$$\lambda = C\left(w_1,w_2,1\right) \tag{8}$$

である．[21]

3.2　生産物産出量の選択

前項で求めた費用関数 $C\left(w_1,w_2,1\right)q$ を所与として利潤を最大にする q を選択する問題，すなわち，

$$\max_{q}\ \ pq - C(w_1,w_2,1)q \quad \text{s.t.}\ \ q \geq 0. \tag{9}$$

を考える．

最適化問題の 1 階条件の機械的な導出に慣れている学習者は，所与とする価格すべてにおいて利潤最大解が常に一意的に存在すると考えがちである．この先入観を取り除くことが，CRS 企業の利潤最大化問題の理解には不可欠である．

問題 (9) は，非負領域で q の正比例関数の差を最大化する問題にほかならない．よって，図 2，3，4 のように，比例定数である p と $C\left(w_1,w_2,1\right)$，すなわち，限界収入[22]と費用最小化時の限界費用との大小関係

$$p \gtreqless C(w_1,w_2,1) \tag{10}$$

[18] 例えば，Varian (1992) p.72.
[19] 奥野 (2008) pp.116–118.
[20] ドウリング (1995) pp.120–121，および，奥野 (2008) pp.114–115.
[21] ドウリング (1995) p.122，および，奥野 (2008) p.47.
[22] 完全競争企業であるため，生産物価格 p は限界収入にほかならない．

に応じて，産出量ゼロのみが解である場合，非負の産出量すべてが解である場合，解が存在しない場合の三つのケースがあることを容易に視認できる．けれども，価格ベクトル (p, w_1, w_2) と各ケースとの関係の全体像は，(10) ではとらえにくい．そこで，場合分けの基準を変更する．

$p > 0$ であるから (10) の各辺を p で除すと $1 \gtreqless \dfrac{C(w_1, w_2, 1)}{p}$ となり，(4) より $\dfrac{C(w_1, w_2, 1)}{p} = C\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}, 1\right)$ であるから，(10) の各ケースに対応する (p, w_1, w_2) は，

$$1 \gtreqless C\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}, 1\right) \tag{11}$$

の各ケースに対応する (p, w_1, w_2) と同値である．(11) の右辺は，任意の産出量における費用最小化時の限界費用・限界収入比率[*23] を表している．そして，この限界費用・限界収入比率は，生産物の量で表した実質生産要素価格のベクトル $\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}\right)$ に依存している．

以上より，問題 (9) の結果を次のようにまとめることができる．与えられた元々の価格ベクトル (p, w_1, w_2) から構成される実質要素価格ベクトル $\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}\right)$ が限界費用・限界収入比率 $C\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}, 1\right)$ を 1 より大にする場合は，産出量ゼロのみが利潤最大解である．ちょうど 1 にする場合は，非負の産出量すべてが利潤最大解である．1 より小にする場合は，利潤最大解は存在しない．

なお，$\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}\right)$ と $C\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}, 1\right)$ の値との具体的な対応関係は，次項において確認する．

3.3 実質要素価格フロンティアの導出

本項では，実質要素価格ベクトル $\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}\right)$ と 限界費用・限界収入比率 $C\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}, 1\right)$ との関係を視覚化する際のツールとして利用する，実質要素価格フロンティアを導出する．

いま，生産物の実質量を表す単位が kg であるとすると，[*24] $C\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}, 1\,\mathrm{kg}\right)$ は生産物を 1 kg 産出するときの実質最小費用と考えられる．この実質最小費用と 1 kg との大小関係，すなわち

$$1\,\mathrm{kg} \gtreqless C\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}, 1\,\mathrm{kg}\right) \tag{12}$$

の各ケースに対応する $\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}\right)$ は，(11) の各ケースに対応する $\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}\right)$ と一致す

*23 CRS 生産技術であるため，この比率は産出量にかかわらず一定である．本論では，以降，単に限界費用・限界収入比率と略記する．

*24 kg の代わりに L にしようが『生産物単位』にしようが本質的な違いはない．

る．[*25] よって，実質要素価格ベクトルと限界費用・限界収入比率との関係を把握するためには，$\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}\right)$ と $C\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}, 1\,\mathrm{kg}\right)$ との関係を把握すれば十分である．

$1\,\mathrm{kg} = C\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}, 1\,\mathrm{kg}\right)$ を満たす $\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}\right)$ の集合は，産出量が 1 kg で実質最小費用が 1 kg である実質要素価格フロンティア[*26]にほかならないから，$\dfrac{w_1}{p}\dfrac{w_2}{p}$ 平面上に描くことができる．そして $1\,\mathrm{kg} \gtrless C\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}, 1\,\mathrm{kg}\right)$ をそれぞれ満たす集合も，これを基準として特定することができる．

以下で実質要素価格フロンティアの導出するが，対象とする学習者のレベルに配慮し，図解によるアプローチを採用する．[*27] なお表記の簡潔化のため，以下の導出過程においては，実質生産要素価格 $\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}$ を，それぞれ，r_1, r_2 と略記する． また単位 kg も省略する．

図 5 のように，まず，原点 O より右側に実質要素価格 r_1，上側に実質要素価格 r_2，下側に要素投入量 z_1，左側に要素投入量 z_2 の，それぞれ，正方向をあらわす座標平面を作る．次に，第二象限に $r_2 z_2 = 1$，第三象限に産出量が 1 のときの等量線 $f(z_1, z_2) = 1$，第四象限に $r_1 z_1 = 1$ を描く．以上で，第一象限に $1 = C(r_1, r_2, 1)$ を満たす (r_1, r_2) の集合，すなわち，産出量が 1 で実質最小費用が 1 の実質要素価格フロンティアを描く準備ができた．

以後，r_1 を所与として，生産物を 1 単位産出するときの最小費用が 1 となるのは r_2 がいくらであるときか考える．$r_1 = r_1'$ のとき，費用が 1 である等費用線の z_1 切片は，$r_1 z_1 = 1$ より $\dfrac{1}{r_1'}$ である．図 5 では，$r_1 = r_1'$ に対応する $r_1 z_1 = 1$ のグラフ上の点の z_1 座標が $\dfrac{1}{r_1'}$ になることを利用して，z_1 切片を確定できる．z_1 切片が $\dfrac{1}{r_1'}$ である等費用線は無数に存在するが，その中で産出量が 1 のときの最小費用をあらわすものは，等量線 $f(z_1, z_2) = 1$ と接するものだけである．この等費用線の z_1 軸に対する傾きを $-(\dfrac{r_1}{r_2})'$ とすると，それで確定する等費用線の式 $z_2 = -(\dfrac{r_1}{r_2})' z_1 + \dfrac{1}{r_1'}(\dfrac{r_1}{r_2})'$ より，z_2 切片は $\dfrac{1}{r_1'}(\dfrac{r_1}{r_2})'$ である．費用が 1

[*25] つまり，$\gtrless$ それぞれにおいて $\left\{\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}\right) \middle| 1\,\mathrm{kg} \gtrless C\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}, 1\,\mathrm{kg}\right)\right\} = \left\{\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}\right) \middle| 1 \gtrless C\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}, 1\right)\right\}$ ということである．

[*26] 企業の要素価格フロンティアとは，ある量 (例えば，q) の生産物を産出するときの最小費用が一定額 (例えば，$\bar{c}$) になる要素価格の組の集合，すなわち，$\bar{c} = C(w_1, w_2, q)$ を満たす (w_1, w_2) の集合のことであり，$w_1 w_2$ 平面に描くことができる．なお，要素価格フロンティアの詳細については，Woodland(2010) を参照されたい．

[*27] Darrough and Southey (1977) における間接効用関数の無差別曲線導出の図を応用する．このような応用は，奥野・鈴村 (1985) pp.97–101 や小山 (1995) pp.605–612 でも見られるが，本論ではそれらと異なる解説を試みる．

である等費用線の z_2 切片が $\dfrac{1}{r_1'}(\dfrac{r_1}{r_2})'$ となるのは，$r_2 z_2 = 1$ より

$$r_2 = \frac{r_1'}{(\frac{r_1}{r_2})'}$$

のときである．この式の右辺が，r_1' と組になる r_2 の値 r_2' にほかならない．図 5 では，$z_2 = \dfrac{1}{r_1'}(\dfrac{r_1}{r_2})'$ に対応する $r_2 z_2 = 1$ のグラフ上の点の r_2 座標 $\dfrac{r_1'}{(\frac{r_1}{r_2})'}$ が，求めるべき r_2' になる．以上よりえられた (r_1', r_2') を第一象限に描くと，実質要素価格フロンティアの一つの点になる．

図 6 では，同じように $r_1 = r_1''$ であるときに組になる r_2 の値 r_2'' を求めて，(r_1'', r_2'') も描いている．さらに同様のプロセスで，r_1 の各値に対して組になる r_2 の値を求め第一象限の点として描くことができる．[*28] このような点をすべて集めると，図 6 の第一象限の曲線のような，右下がりで原点に対して凸の曲線[*29] ができる．これが，実質要素価格フロンティアである．

(r_1, r_2) が実質要素価格フロンティア上にあるとき，$C(r_1, r_2, 1)$ の値は定義により 1 である．それでは，(r_1, r_2) が実質要素価格フロンティア上にない場合，すなわち，要素価格フロンティアの右上方，あるいは，左下方にある場合，$C(r_1, r_2, 1)$ の値はどうなるだろうか．図 7 のように，図 6 の第二象限の $r_1 z_1 = 1$ と第四象限の $r_2 z_2 = 1$ を，それぞれ $w_1 z_1 = \bar{k} < 1$ と $w_2 z_2 = \bar{k} < 1$ で置き換え，最小費用が 1 より小であるときに r_1' の組となる r_2 の値を求めると，r_2' より小さい $\bar{r}_2$ がえられる．r_1 の他の値についても同様に，実質要素価格フロンティア上で組となる r_2 の値よりも小さいものが対応することを確認できる．反対に，最小費用が 1 より大である場合を検討するために $r_1 z_1 = \hat{k} > 1$ と $r_2 z_2 = \hat{k} > 1$ で置き換え，r_1' と組となる r_2 の値を求めると，r_2' より大きい $\hat{r}_2$ がえられる．r_1 の他の値についても同様に，実質要素価格フロンティア上で組となる r_2 の値よりも大きいものが対応することを確認できる．よって，(r_1, r_2) が実質要素価格フロンティアの右上方にある場合は $1 < C(r_1, r_2, 1)$ であり，左下方にある場合は $1 > C(r_1, r_2, 1)$ であることがわかる．

本項で導出した実質要素価格フロンティアを利用し，記号を元に戻して $\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}\right)$ と $C\left(\dfrac{w_1}{p}, \dfrac{w_2}{p}, 1\right)$ の値との関係を表したものが図 8 である．なお，導出プロセスから理解できるように，実質要素価格フロンティアの形状は等量線 $f(z_1, z_2) = 1$ の形状に依存して決まる．そのため，企業の生産技術の違いが実質要素価格フロンティアの形状に反映される．代替の弾力性が大である企業，すなわち，等量線が直線に近い企業の実質要素価格フ

[*28] レオンチェフ型生産関数や線型生産関数の場合など，部分的に r_1 と組になる r_2 が存在しなかったり複数存在したりすることがあるため，注意が必要である．

[*29] より正確には「右上がりの部分や原点から見て凹んだ部分がない曲線」である．

ロンティアは曲率が大きいL字型に近い曲線となり，代替の弾力性が小である企業，すなわち，等量線がL字型に近い企業の要素価格フロンティアは直線に近くなる．[*30] また，技術進歩によって等量線が原点側にシフトすると，実質要素価格フロンティアは右上方へシフトする．

3.4　価格と生産物供給量・要素需要量との関係

3.1 項と 3.2 項の結果より，CRS 企業の問題 (1) の解は，所与とする価格ベクトルから形成される実質要素価格ベクトル $\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}\right)$ における限界費用・限界収入比率 $C\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}, 1\right)$ の値に応じて，三つに場合分けされることがわかった．また，3.3 項で作成した図 8 により，実質要素価格と限界費用・限界収入比率との関係を視覚化することができた．以上より，利潤を最大化する完全競争的な CRS 企業について，価格と生産物産出量・生産要素投入量との関係の全体像をつかむことができる．

生産物と各生産要素の価格ベクトル (p, w_1, w_2) が与えられると，生産要素 1 および生産要素 2 の実質価格の対，視覚的には $\frac{w_1}{p}\frac{w_2}{p}$ 平面上の点 $\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}\right)$ が一つ確定する．

与えられた価格ベクトルに対応する点が実質要素価格フロンティアの右上方にあるときは，

$$1 < C\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}, 1\right) \tag{13}$$

が成立している．これは，同価格ベクトルにおいては，費用最小化を実現して生産したとしても限界費用・限界収入比率が 1 より大になることを意味している．よって，$q = z_1 = z_2 = 0$ のみが利潤最大解になる．つまり，何も投入せず何も産出しないこと，すなわち，生産活動をしないことが，損失が最小のゼロになるという意味で企業にとって最適である．

対応する点がちょうど実質要素価格フロンティア上にあるときは，

$$1 = C\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}, 1\right) \tag{14}$$

が成立している．これは，同価格ベクトルにおいては，費用最小化を実現して生産すれば，産出量にかかわらず限界費用・限界収入比率が 1 になることを意味している．したがって，費用最小化条件さえ満たしていれば，(ゼロを含めて) どのような産出量を選択しても最大利潤ゼロがえられる．つまり，費用最小化が利潤最大化の十分条件となっている．よって利潤最大解は，

$$(q, z_1, z_2) = \Big(t,\ z_1(w_1, w_2, 1)t,\ z_2(w_1, w_2, 1)t\Big) \quad \text{ただし，} t \text{ は任意の非負の実数}$$

[*30] 例えば，奥野・鈴村 (1985) pp.108–112.

となる．すなわち，任意の非負の産出量と，そのもとで費用を最小化する各生産要素投入量との組み合わせが，すべて同様に企業にとって最適である．

対応する点が実質要素価格フロンティアの左下方にあるときは，

$$1 > C\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}, 1\right) \tag{15}$$

が成立している．これは，同価格ベクトルにおいては，技術的に実現可能な生産物産出量と生産要素投入量との組み合わせで限界費用・限界収入比率を 1 より小にするものが存在することを意味している．そのような産出量・投入量の組み合わせを同率で拡大することによって，企業はどこまでも利潤を増加させることができる．よって，実現可能な利潤の上限が存在しないという意味で，企業の利潤最大解は存在しない．

4　テキストに頻出するケースの特殊性

本節では，2 節で紹介した Mankiw (2013) などのマクロ経済学・経済成長論および国際貿易論のテキストが，2 生産要素 1 生産物で CRS の完全競争企業の利潤最大化問題を取り扱う際，暗黙においている仮定とその妥当性について検討する．

Mankiw (2013) などのテキストでは，CRS 企業が各生産要素の限界生産物と実質要素価格が等しくなるように要素投入量を決定する，すなわち，(2) を満たすように z_1, z_2 を選択すると説明しているが，このような主張が成り立つためにはさらなる条件が必要である．所与とする価格ベクトル (p, w_1, w_2) が (14)，すなわち $p = C(w_1, w_2, 1)$ を満たすときは，企業は任意の非負の産出量とそのもとで費用を最小化する要素投入量の組み合わせを選択する．このとき企業の生産関数 $f(\cdot)$ が連続微分可能であれば，内点解において，(6)，(7)，(8) より確かに (2) が成立する．ところが (p, w_1, w_2) が (13) または (15) を満たすときは，(2) の成立は保証されない．(13) のときは $(q, z_1, z_2) = (0, 0, 0)$ のみが利潤最大解であるが，テキストで CRS の例として最もよく引き合いに出されるコブ=ダグラス型生産関数 $f(z_1, z_2) = Az_1^{\alpha} z_2^{1-\alpha}$, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$ で確認してみると

$$f_1(0,0) = \lim_{h_1 \downarrow 0} \frac{A \cdot h_1^{\alpha} \cdot 0^{1-\alpha} - A \cdot 0^{\alpha} \cdot 0^{1-\alpha}}{h_1} = 0,$$

$$f_2(0,0) = \lim_{h_2 \downarrow 0} \frac{A \cdot 0^{\alpha} \cdot h_2^{1-\alpha} - A \cdot 0^{\alpha} \cdot 0^{1-\alpha}}{h_2} = 0$$

より

$$f_1(0,0) < \frac{w_1}{p},\ f_2(0,0) < \frac{w_2}{p}$$

であるから，利潤最大解において (2) は成立していない．また (15) のときは，$f(\cdot)$ にかかわらず利潤最大解自体が存在しない．したがって Mankiw (2013) などのテキストでは，

(p, w_1, w_2) が (14) を満たすことを前提として CRS 企業の行動を定式化し，同企業で構成される経済を分析していることがわかる．[*31]

そこで問題は，2 生産要素 1 生産物モデルの一般均衡を分析する際，価格ベクトルが (13) または (15) を満たすケースを除外して，(14) を満たすケースのみに集中することが妥当であるかどうかということになる．一般均衡について検討するためには，企業行動に加えて，家計による生産要素の供給と生産物の需要について明示する必要がある．いま生産要素 1 および 2 を，それぞれ，$\bar{x}_1 > 0, \bar{x}_2 > 0$ だけ初期保有する代表的家計の存在を仮定し，この家計の生産要素 1 自家消費量を $x_1 \geq 0$，生産要素 2 自家消費量を $x_2 \geq 0$，生産物消費量を $x_3 \geq 0$，効用関数を $U(x_1, x_2, x_3)$ とし[*32]，企業からの利潤分配額を Π とすると，各生産要素供給量および生産物需要量は最適化問題

$$\max_{x_1,\, x_2,\, x_3} \quad U(x_1, x_2, x_3)$$
$$\text{s.t.}\ \ w_1[\bar{x}_1 - x_1] + w_2[\bar{x}_2 - x_2] + \Pi \geq p x_3,\ 0 \leq x_1 \leq \bar{x}_1,\ 0 \leq x_2 \leq \bar{x}_2, x_3 \geq 0$$

の解より導くことができる．

家計の各生産要素初期保有量 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ は有限であるから，$U(\cdot)$ にかかわらず，あらゆる価格ベクトル (p, w_1, w_2) において各生産要素供給量および生産物需要量は有限値をとる．そのため，(15) のような企業の各生産要素需要量 (投入量) および生産物供給量 (産出量) が有限値にならないケースでは，明らかに一般均衡は成立しない．よって，(15) を分析対象から除外することは妥当であると考えられる．

次に (13) について検討する．KKT 条件[*33]より，価格ベクトル (p, w_1, w_2) に対応する実質要素価格 $\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}\right)$ が

$$\frac{w_1}{p} \leq \frac{U_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}{U_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)},\ \frac{w_2}{p} \leq \frac{U_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}{U_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}$$

を満たすときは，$x_1 = \bar{x}_1,\ x_2 = \bar{x}_2,\ x_3 = 0$ が効用最大解である．(13) のときの利潤最大解は $q = z_1 = z_2 = 0$ であるから，

$$1 \leq C\left(\frac{U_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}{U_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}, \frac{U_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}{U_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}, 1\right) \tag{16}$$

[*31] ただし，(14) のときは費用最小化が利潤最大化の十分条件であるため，ここでの「企業は各生産要素の限界生産物と実質要素価格が等しくなるように要素投入量を決定する」という主張は，「企業は $q > 0$ である費用最小解のいずれかを選択する」という主張以上の意味を持たないことに注意する必要がある．

[*32] U の単調性，強意準凹性，および，連続微分可能性を仮定する．

[*33] Karush-Kuhn-Tucker 条件．

であれば，図 9 の灰色の領域 (境界線を含む) に対応する実質要素価格

$$\left(\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}\right) \in \left\{ (r_1, r_2) \middle| r_1 \leq \frac{U_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}{U_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)},\ r_2 \leq \frac{U_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}{U_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)},\ 1 \leq C(r_1, r_2, 1) \right\}$$

において，各生産要素はすべて自家消費され生産物は産出されず家計と企業との間の取引は一切おこなわれない，という一般均衡が成立することがわかる．[*34] 応用分野で頻出する準線型の効用関数 $U(x_1, x_2, x_3) = \phi(x_1, x_2) + x_3$ の場合などにおいて (16) は容易に生じるため， $U(\cdot)$ の限定なしで (13) を除外することはできない．(13) を除外するためには

$$\lim_{h_3 \downarrow 0} \frac{U_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, h_3)}{U_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, h_3)} = 0,\ \lim_{h_3 \downarrow 0} \frac{U_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, h_3)}{U_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, h_3)} = 0$$

のような $U(\cdot)$ に関する追加的仮定を導入し，(16) が成立しないようにする必要がある．

以上より，Mankiw (2013) などのテキストにおける価格ベクトルが (14) を満たすことを前提とする CRS の定式化は，当該企業以外の経済主体である家計の選好を限定することにより，はじめて正当化できるといえる．テキストでは，モデルの展開を急ぐためか，(14) を前提としていること，および，その妥当性についてほとんどふれられていないが，モデルの経済像や限界に興味を持つ学習者に対しては，本論のような補足が不可欠であろう．

5　結び

本論では，偏微分の初歩的な理解ができたレベルの学習者を念頭におき，2 生産要素 1 生産物の CRS 生産技術を持つ完全競争企業の利潤最大化問題についての，マクロ経済学などのテキストにおける解説の補完案を示した．

元々の生産関数を所与とする利潤最大化問題を，生産関数と産出量を所与とする費用最小化問題と，それによってえられる費用関数を所与とする利潤最大化問題に分割して分析し，費用最小化時の限界費用・限界収入比率を手がかりとして結果を統合したことがひとつのポイントであった．そして解釈の際，実質要素価格フロンティアを援用して，各実質要素価格と限界費用・限界収入比率の値との関係を視覚化し，価格ベクトルと利潤最大化の結果である三つのケースとの関係の全体像をつかめるようにしたことがもうひとつのポイントであった．

本論のような補完的解説があれば，マクロ経済学などのテキストが，費用最小化が利潤最大化の十分条件となる価格ベクトルのみに注目して CRS 企業の行動を展開していることを学習者が理解できるため，混乱は緩和されるであろう．

[*34] いうまでもなく

$$(p, w_1, w_2) \in \left\{ (t, tr_1, tr_2) \middle| t > 0,\ r_1 \leq \frac{U_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}{U_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)},\ r_2 \leq \frac{U_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}{U_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)},\ 1 \leq C(r_1, r_2, 1) \right\}$$

がすべて均衡価格ベクトルである．

本論のアプローチは，単独の CRS 企業の行動の把握だけでなく，複数の種類の CRS 企業が存在するケースや，CRS 企業と規模に関して収穫逓減の企業が混在するケースなど，企業の同質性を仮定しない場合の 2 生産要素 1 生産物モデルの集計問題に対しても有効と考えられる．

参考文献

[1] Darrough, M. N. and C. Southey "Duality in Consumer Theory Made Simple: the Revealing of Roy's Identity," *Canadian Journal of Economics,* vol.10, no.2, 1977, pp.307–317.

[2] ドウリング, E. 『例題で学ぶ入門経済数学（上）』CAP 出版, 1995.

[3] 林 貴志 『ミクロ経済学　増補版』ミネルヴァ書房, 2013.

[4] Henderson, J. M. and R. E. Quandt *Microeconomic Theory,* Third Edition, New York: McGraw-Hill, 1980.

[5] Jones, C. I. and D. Vollrath *Introduction to Economic Growth,* Third Edition, New York: W. W. Norton & Company, 2013.

[6] 小山 昭雄 『経済数学教室 6 微分積分の基礎 (下) 』岩波書店, 1955.

[7] Mankiw, N. G. *Macroeconomics,* Eighth Edition, Worth Publishers, 2013.

[8] Mas-Colell, A., M. D. Whinston, M. D. and J. R. Green *Microeconomic Theory,* New York: Oxford University Press, 1995.

[9] 西村 和雄 『ミクロ経済学』東洋経済新報社, 1990.

[10] 奥野 正寛 編著 『ミクロ経済学』東京大学出版会, 2008.

[11] 奥野 正寛・鈴村 興太郎 『ミクロ経済学 I 』岩波書店, 1985.

[12] 齊藤 誠・岩本 康志・太田 聰一・柴田 章久 『マクロ経済学』有斐閣, 2010.

[13] 武隈 愼一 『ミクロ経済学　増補版』新世社, 1999.

[14] Woodland, A. D. "The Factor Price Frontier" in Blaug, M. and P. Lloyd (eds.), *Famous Figures and Diagrams in Economics,* Cheltenham, UK: Edward Elgar, 2010.

[15] Varian, H. R. *Microeconomic Analysis,* Third Edition, New York: W. W. Norton & Company, 1992.

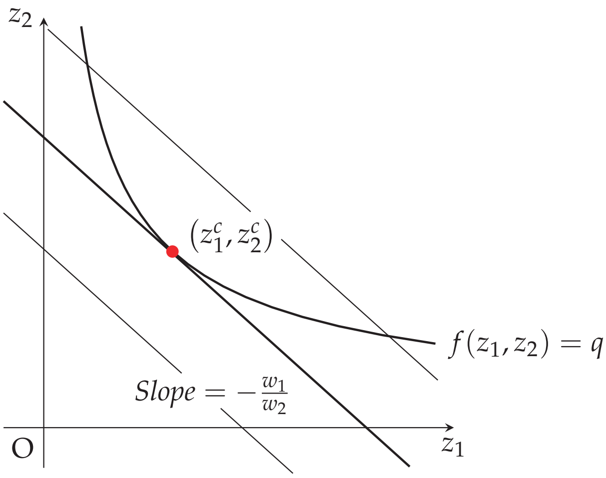

図 1　費用最小解

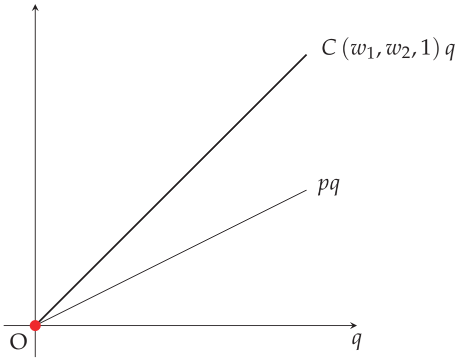

図 2　$p < C\,(w_1, w_2, 1)$ のケース

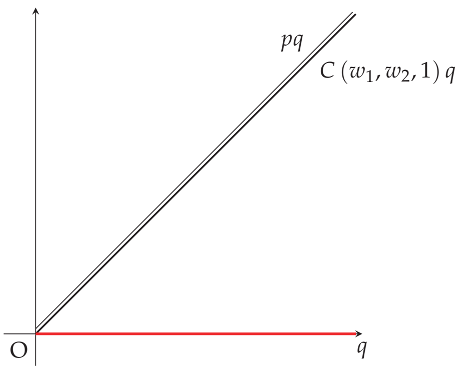

図 3　$p = C\,(w_1, w_2, 1)$ のケース

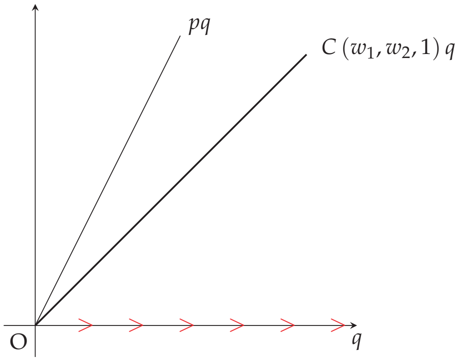

図 4　$p > C\,(w_1, w_2, 1)$ のケース

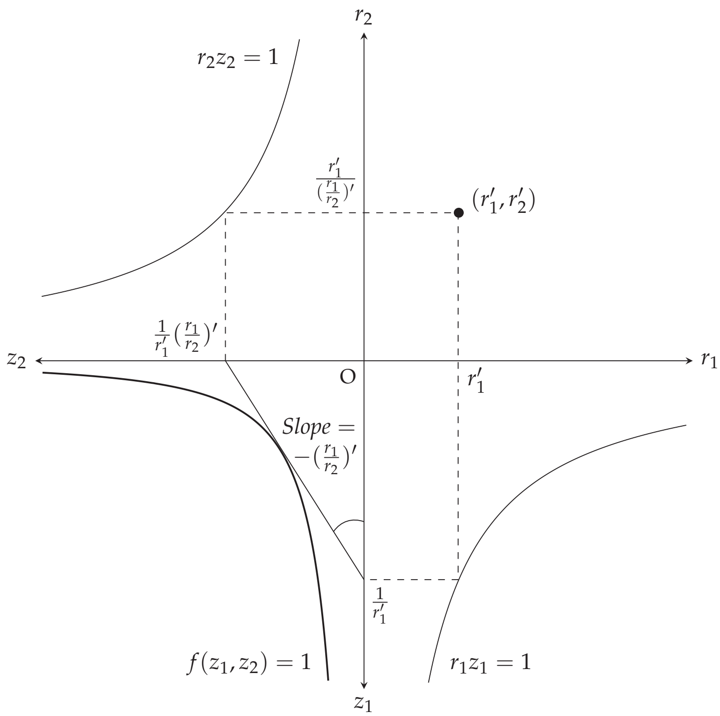

図 5　実質要素価格フロンティアの導出（その 1）

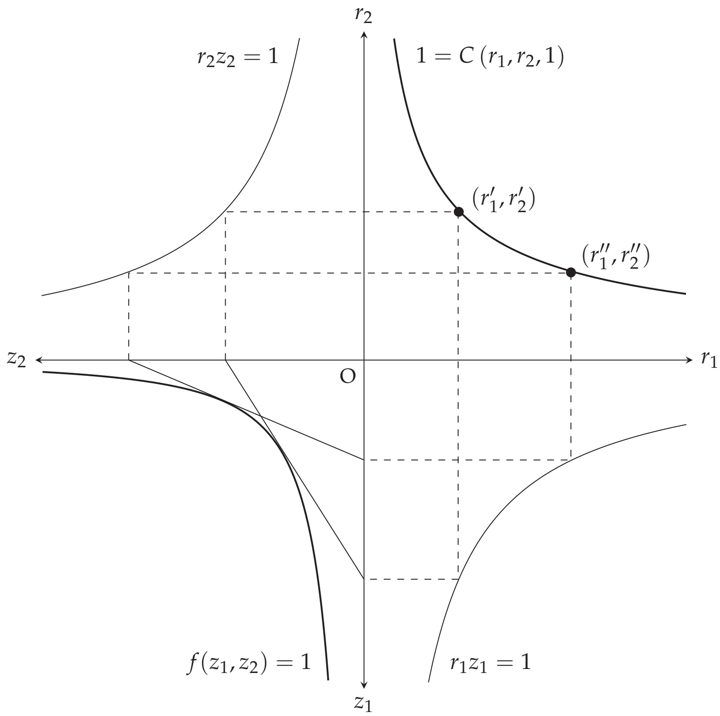

図 6　実質要素価格フロンティアの導出（その 2）

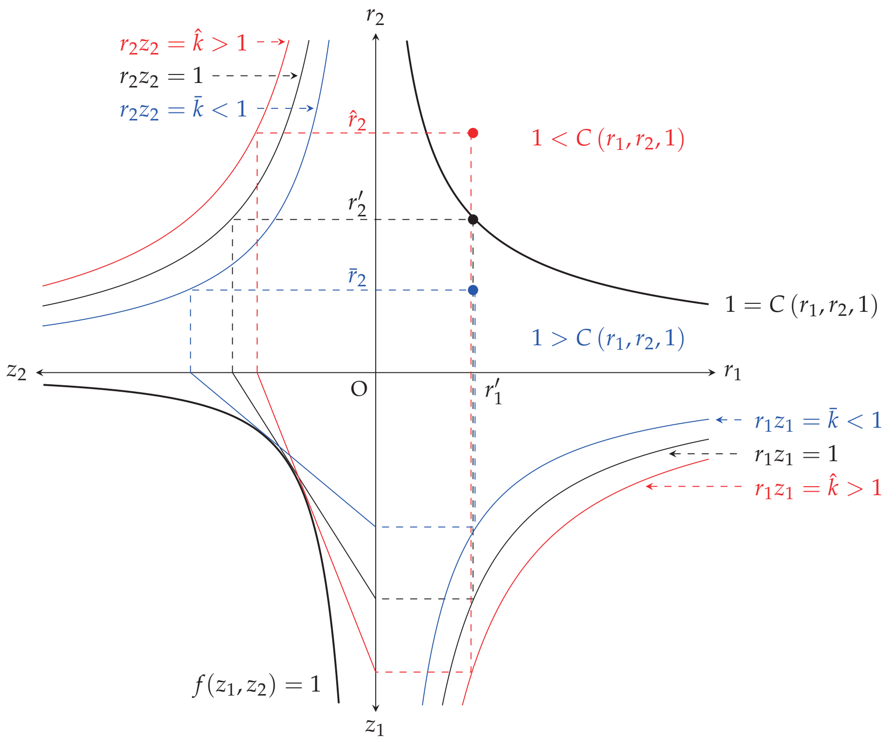

図 7　領域の確認

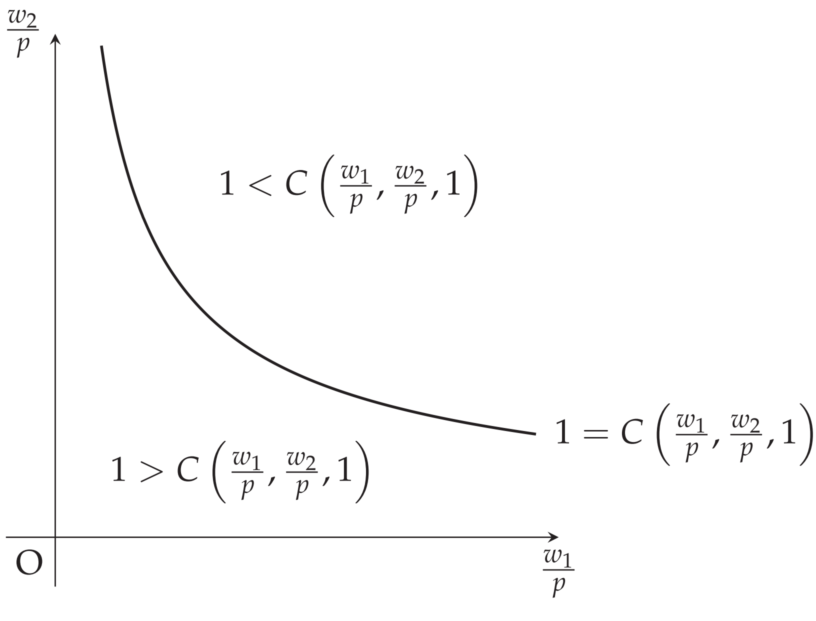

図 8　実質要素価格と限界費用・限界収入比率との関係

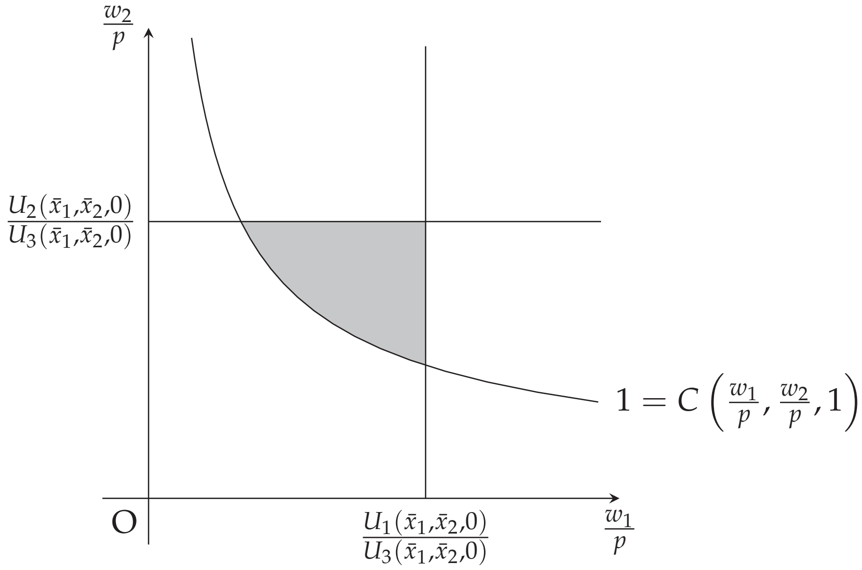

図 9　取引量がゼロとなる均衡実質要素価格